1 ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ

Теорема 1.1. Любое натуральное число N, за исключением единицы, может быть представленно в виде произведения простых множителей $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ ($p_1, p_2, \ldots, p_n$— различные простые числа, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — натуральные числа, большие 1), причем это представление единственно с точностью до перестановки множителей.

1. Делится ли $2^9 \cdot 3$ на 8, $2^9 \cdot 3$ на 9, $2^9 \cdot 3$ на 6?

2. Верно ли, что если натуральное число делится на 4 и 3, то оно делится на 12?

3. Верно ли, что если натуральное число делится на 4 и 6, то оно делится на 24?

4. Число N не делится на 3, может ли число $2N$ делится на 3?

5. Число N— четное. Верно ли, что $3N$ делится на 6?

6. Число $5N$ делится на 3. Верно ли, что N делится на 3?

7. Число $15N$ делится на 6. Верно ли, что N делится на 6?

Вывод:

1. Если число a делится на числа x и y, **и числа x и y — взаимно простые**, то a делится на xy.

2. Если число ab делится на x, **и числа b и x — взаимно простые**, то a делится на x.

2 НОД и НОК

1. $N = 2^3 \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7^2$, $M = 2^5 \cdot 3 \cdot 11$. Чему равен НОД(M, N)?
2. $N = 2^8 \cdot 5^3 \cdot 7$, $M = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^7$. Чему равен НОК$(M, N)$?

Вывод:

1. Если число $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, а число $a = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$, то
$$\text{НОД}(a, b) = p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdot p_2^{\min\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdot \ldots \cdot p_n^{\min\{\alpha_n,\beta_n\}}.$$
2. Если число $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, а число $a = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$, то
$$\text{НОК}(a, b) = p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdot p_2^{\max\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdot \ldots \cdot p_n^{\max\{\alpha_n,\beta_n\}}.$$
3. НОД$(a, b) \cdot$ НОК$(a, b) = ab$

   Здесь мы считаем, что если у чисел разные наборы множителей, то мы дополняем каждый из наборов недостающими множителями в нулевой степени.
4. Найдите НОД всех чисел $p^2 - 1$, где p— простое число, большее 3, но меньшее 2010.

3 ОСТАТКИ

Пусть $N_1 = k_1 n + r_1$, $N_2 = k_2 n + r_2$. Тогда,

1. числа $N_1 + N_2$ и $r_1 + r_2$ имеют одинаковые остатки при делении на n.

2. числа $N_1 \cdot N_2$ и $r_1 \cdot r_2$ имеют одинаковые остатки при делении на n.

ЗАДАЧИ

1. Найти остаток от деления $2010 \cdot 2011 \cdot 2012 + 2013 \cdot 2014 \cdot 2015$ на 7, 9^{100} на 8, 2^{100} на 3.

2. Найти остаток от деления 3^{2011} на 7.

3. На какую цифру заканчиваются числа 777^{777}, 7^{7^7}, 2012^{2012}?

4. Найдите последнюю цифру числа $1^2 + 2^2 + \ldots + 99^2$.

5. Докажите, что число $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7.

6. $56a = 65b$. Докажите, что $a + b$ — составное число.

7. $a + 1$ делится на 3. Докажите, что $4 + 7a$ делится на 3.

8. $2 + a$ и $35 - b$ делятся на 11. Докажите, что $a + b$ делится на 11.

9. Про семь натуральных чисел известно, сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что и каждое из чисел делится на 5.

10. Докажите, что сумма $n > 1$ последовательных нечетных натуральных чисел является составным числом.

11. Докажите, что число $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 при любом натуральном n.

12. Найдите наименьшее натуральное n, такое что при длении на 2 оно дает остаток 1, при делении на 3 — 2, и т.д. при делении на 6 — 5.

13. Докажите, что если $(n-1)! + 1$ делится на n, то n — простое.

ПЕРЕБОР ОСТАТКОВ

1. Докажите, что число $n(n+1)(n+2)$ делится на 6 для любого натурального n.
2. Докажите, что число $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ делится на 120 для любого натурального n.
3. Докажите, что число n^3+2n делится на 3 для любого натурального n.
4. Докажите, что число n^5+4n делится на 5 для любого натурального n.
5. Докажите, что число n^2+1 не делится на 3 ни при каком натуральном n.
6. Докажите, что число n^3+2 не делится на 9 ни при каком натуральном n.
7. Докажите, что число n^3-n делится на 24 для любого нечетного n.
8. Натуральные числа x, y, z таковы, что $x^2+y^2=z^2$. Докажите, что хотя бы одно из них делится на 3. Докажите, что хотя бы одно из чисел x и y делится на 3.
9. Натуральные числа a и b таковы, что число a^2+b^2 делится на 21. Докажите, оно делится на 441.
10. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a+b+c$ делится на 6. Докажите, что $a^3+b^3+c^3$ делится на 6.
11. Докажите, что сумма квадратов трех натуральных чисел, уменьшенная на 7, не делится на 8.
12. Сумма трех натуральных чисел, являющихся точными квадратами, делится на 9. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых, также делится на 9.
13. Три простых числа, большие 3, образуют арифметическую прогрессию с разностью d. Докажите, что d делится на 6.

ВЫБОР МОДУЛЯ

1. Квадраты натуральных чисел при делении на 3 дают остатки 0, 1.
2. Квадраты натуральных чисел при делении на 4 дают остатки 0, 1.
3. Кубы натуральных чисел при делении на 7 дают остатки 0, 1, 6.
4. Кубы натуральных чисел при делении на 9 дают остатки 0, 1, 8.
5. $p, p+10, p+14$ — простые числа. Найдите p.
6. $p, 2p+1, 4p+1$ — простые числа. Найдите p.
7. $p, 8p^2+1$ — простые числа. Найдите p.
8. p, p^2+2 — простые числа. Докажите, что p^3+2 — также простое.
9. $p, 4p^2+1, 6p^2+1$ — простые числа. Найдите p.
10. Докажите, что не существует натуральных чисел a и b таких, что $a^2-3b^2=8$.
11. Может ли сумма квадратов двух нечетных чисел быть квадратом целого числа?
12. Может ли сумма квадратов трех нечетных чисел быть квадратом целого числа?
13. Может ли сумма квадратов пяти последовательных чисел натуральных чисел быть квадратом целого числа?
14. Докажите, что число a^3+b^3+4 не является кубом целого числа ни при каких натуральных a и b.
15. Докажите, что число $6n^3+3$ не является шестой степенью целого числа ни при каком натуральном n.

АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

ИДЕЯ: НОД$(a, b) =$ НОД$(b, a - b)$.

Если $a = kb + r$, то НОД$(a, b) =$ НОД(b, r).

1. Найти наибольший общий делитель 451 и 287.
2. Найти наибольший общий делитель $2n + 13$ и $n + 7$.
3. При каких натуральных n дробь $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ сократима?
4. Найдите НОД$(2^{100} - 1, 2^{120} - 1)$.
5. Найдите НОД$(111\ldots111, 11\ldots11)$ — в записи первого 100 единиц, в записи второго — 60.

АРИФМЕТИКА ОСТАТКОВ Целые числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если они имеют одинаковые остатки по модулю m. Запись $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$.

1. $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$ тогда и только тогда, когда $a - b$ делится на m.
2. Пусть $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$, $c \equiv d (\operatorname{mod} m)$ тогда $a + c \equiv b + d (\operatorname{mod} m)$.
3. Пусть $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$, $c \equiv d (\operatorname{mod} m)$ тогда $ac \equiv bd (\operatorname{mod} m)$.
4. Найдите остаток от деления 6^{2011} на 7.
5. Докажите, что $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31.
6. Докажите, что $43^{101} + 23^{101}$ делится на 66.
7. Докажите, что $a^n + b^n$ делится на $a + b$, если n — нечетное число.
8. Докажите, что $1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (n-1)^n$ делится на n, если n — нечетное число.
9. Докажите, что существует бесконечно много чисел, не представимых в виде суммы трех точных кубов.
10. Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.
11. Какое число нужно добавить к $(n^2 - 1)^{1000} \cdot (n^2 + 1)^{1001}$, чтобы полученнный результат делился на n?
12. Найдите остаток от деления на 7 числа $10^{10} + 10^{100} + 10^{1000} + \ldots + 10^{10000000000}$.
13. Сколько существует натуральных n, меньших 10000, для которых $2^n - n^2$ делится на n?
14. Пусть $k = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_i$ — произведение нескольких первых простых чисел. Докажите, что $k - 1$ и $k + 1$ не являются точными квадратами.
15. Существует ли такое натуральное n, что $n^2 + n + 1$ делится на 2010?
16. $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} \cdot a_n + 1$. Докажите, что ни один из членов последовательности не делится на 4.
17. Пусть n — натуральное число такое, что $n + 1$ делится на 24. Докажите, что и сумма всех делителей делится на 24.

ДЕСЯТИЧНАЯ ЗАПИСЬ ЧИСЛА

1. Может ли число, записываемое при помощи 100 двоек, 100 нулей и 100 единиц быть квадратом целого числа?
2. Может ли число $100\ldots00500\ldots001$(в каждой группе по 2011 нулей), быть кубом целого числа?
3. Квадрат натурального числа не может оканчиваться на $2, 3, 7, 8$.
4. Число N сравнимо со своими последними n цифрами по $\bmod 2^n, 5^n$.
5. Число N сравнимо с суммой своих цифр по $\bmod 3, 9$.
6. Последняя цифра квадрата равна 6. Докажите, что его предпоследняя цифра — нечетная.
7. Предпоследняя цифра квадрата натурального числа — нечетная. Докажите, что оно заканчивается на 6.
8. Докажите, что степень двойки не может оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами.
9. Найдите 100-значное число без нулевых цифр, которое делится на сумму своих цифр.
10. Можно ли записать точный квадрат, использовав по 10 раз цифры а) 2, 3, 6; б) 1, 2, 3.
11. У числа 2^{100} нашли сумму его цифр, у результата снова нашли сумму и т.д. пока не осталось одно число. Какое?
12. Докажите, что если записать в обратном порядке цифры натурального числа, то разность исходного и нового чисел будет делиться на 9.
13. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.
14. Сколько имеется четырехзначных чисел, которые делятся на 45, а две средние цифры у них — 97.
15. Найти наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого встречаются все 10 цифр.
16. Докажите, что призведение последней цифры числа 2^n, $n > 3$, и суммы всех его цифр, кроме последней делится на 3.
17. Может ли сумма цифр точного квадрата равняться 2012?
18. Из трехзначного числа вычли сумму его цифр. С полученным результатом проделали тоже самое и т.д. Докажите, что в результате получится 0.
19. $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$. Докажите, что $x \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n$.
20. Докажите, что число $11\ldots1111$, $n = 2k$ единиц — составное.
21. Докажите, что число $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n a_n \ldots a_2 a_1}$ — составное.
22. a, b, c, d — различные цифры. Докажите, что $cdcdcdcdcd$ не делится на $aabb$.
23. Пусть N — шестизначное число, в записи которого по одному разу встречаются цифры $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Докажите, что N не делится на 11.
24. Докажите, что разность числа, имеющего нечетное число цифр, и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 99.
25. Можно ли из цифр 2, 3, 4, 9 составить два числа, одно из которых в 19 раз больше другого?

26. Сумма двух цифр a и b делится на 7. Докажите, что число $\overline{aba}$ также делится на 7.

27. Сумма цифр трехзначного числа равна 7. Докажите, что это число делится на 7 тогда и только тогда, Когда две его последние цифры равны.

28. Дано шестизначное число $\overline{abcdef}$, причем $\overline{def} - \overline{abc}$ делится на 7. Докажите, что и само число делится на 7.

29. Сформулируйте и докажите признаки делимости на 7, 13.

30. Дано шестизначное число $\overline{abcdef}$, причем $\overline{abc} + \overline{def}$ делится на 37. Докажите, что и само число делится на 37.

31. Сформулируйте и докажите признак делимости на 37.

32. Существует ли трехзначное число $\overline{abcdef}$ такое, что $\overline{abc} - \overline{cba}$ является квадратом натурального числа?

33. Найти наименьшее число, записываемое одними единицами, делящееся на $333\ldots33$ (в записи 100 троек).

34. Может ли сумма нескольких первых натуральных чисел заканчиваться на 2012?

35. Найдите все натуральные числа, которые увеличиваюися в 9 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить нуль.

36. Между цифрами двузначного числа вставили 0, и к полученному трехзначному прибавили удвоенную цифру его сотен. Получили число в 9 раз больше первоначального. Найдите исходное число.

37. Найти четырехзначное число, являющееся точным квадратом, первые две цифры которого равны между собой и последние две цифры которого равны между собой.

38. Найдите все трехзначные числа, каждая натуральная степень которых оканчивается на три цифры, составляющие первоначальное число.

39. К числу справа приписывают тройки. Докажите, что когда-нибудь получится составное число.

40. Докажите, что числа 10001, $100010001, \ldots$ — составные.

УРАВНЕНИЯ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Линейные

1. Решить уравнение $3x + 5y = 7$ в целых числах.
2. Решите уравнение $1990x - 173y = 11$.
3. Решите уравнение $2x + 3y + 5z = 11$ в целых числах.

Разложение на множители

4. Решить в целых числах уравнение $10x^2 + 11xy + 3y^2 - 7 = 0$.
5. Решить в целых числах уравнение $xy = x + y + 3$.
6. Решить в целых числах уравнение $x^2 = 14 + y^2$.
7. Решить в целых числах уравнение $x^2 + y^2 = x + y + 2$.

Используем модуль.

8. Решить в целых числах уравнение $x^2 + y^2 = 4z - 1$.
9. Решить в целых числах уравнение $x^2 - 7y = 10$.
10. Решить в целых числах уравнение $x^3 + 21y^2 + 5 = 0$.
11. Решить в целых числах уравнение $15x^2 - 7y^2 = 9$.
12. Решить в целых числах уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 8t - 1$.

Оценки

13. Решить в натуральных числах $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.
14. Докажите, что уравнение $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ имеет единственное решение в натуральных числах тогда и только тогда, когда n — простое число.
15. Решить в натуральных числах уравнение $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{25}$, где $m > n$.

Синтез

16. Решить в целых числах уравнение $3^m + 7 = 2^n$.
17. Решить в целых числах уравнение $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.
18. Решить в натуральных числах уравнение $n! + 5n + 13 = k^2$.
19. Решить в целых числах $mn^2 = 10^5 n + m$.
20. Решить в целых числах $m^4 - 2n^2 = 1$.
21. Решить в натуральных числах $3^n + 4^m = 5^k$.
22. Найдите все натуральные числа, являющихся степенью двойки, такие, что после зачеркивания первой цифры их десятичной записи снова получается запись числа, являющегося степенью двойки.
23. Найдите все несократимые дроби $\frac{b}{a}$ такие, что $\frac{b}{a} = a, b$.
24. Решить в целых числах $1 + 2^k + 2^{2k+1} = n^2$.

25. Все обыкновенные правильные несократимые дроби, числители и знаменатели которых двузначные числа, упорядочили по возрастанию. Между какими двумя последовательно расположенными дробями находится число $\frac{5}{8}$?

26. На числовой оси отмечены все точки с целыми координатами. Разрешается прыгать на 1 и 4 вправо и влево. Можно ли за 2010 таких прыжков попасть из т. 1 в т. 2, ни разу не попадая в точки с координатами, кратными 4?

НАТУРАЛЬНЫЕ ДЕЛИТЕЛИ ЧИСЛА

Лемма 1. Число $x = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ имеет ровно $(\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n + 1)$ делителей, включая 1 и само себя.

1. Найдите все натуральные числа, последняя десятичная цифра которых 0 и которые имеют ровно 15 различных натуральных делителей.

2. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 42 и имеют ровно 42 различных делителя.

   Лемма 2. Сумма всех делителей числа $x = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ может быть найдена по формуле

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{\alpha_1}) \cdot \ldots \cdot (1 + p_n + p_n^2 + \ldots + p_n^{\alpha_n}).$$

3. У числа n ровно 6 натуральных делителей. Сумма этих делителей равна 3500. Найдите все n.

Лемма 3. Степень, в которой простое число p входит в разложение $n!$, может быть вычислена по формуле

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^k}\right],$$

где k удовлетворяет неравенствам $p^k \leqslant n < p^{k+1}$.

4. При каком наименьшем натуральном n число 2009! не делится на n^n?