Следующие задачи используют

Лемма 1. Число $x = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ имеет ровно $(\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n + 1)$ делителей, включая 1 и само себя.

1. Найдите все натуральные числа, последняя десятичная цифра которых 0 и которые имеют ровно 15 различных натуральных делителей.

   Ответ: $x = 2^2 \cdot 5^4$, $x = 2^4 \cdot 5^2$.

   Решение. Так как 15 раскладывается на множители всего двумя способами: $15 = 1 \cdot 15$, $15 = 3 \cdot 5$, то число x, имеющее ровно 15 делителей, представимо в одном из двух видов: $x = p^{14}$ или $x = p^2 \cdot q^4$. Число, оканчивающиеся на 0 делится на 2 и на 5, следовательно, первый вид не подходит. Значит, $x = 2^2 \cdot 5^4$ или $x = 2^4 \cdot 5^2$.

2. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 42 и имеют ровно 42 различных делителя.

   Ответ: $2 \cdot 3^2 \cdot 7^6$; $2 \cdot 7^2 \cdot 3^6$; $3 \cdot 2^2 \cdot 7^6$; $3 \cdot 7^2 \cdot 2^6$; $7 \cdot 2^2 \cdot 3^6$; $7 \cdot 3^2 \cdot 2^6$.

   В следующей задаче также используется

   Лемма 2. Сумма всех делителей числа $x = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ может быть найдена по формуле

   $$(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{\alpha_1}) \cdot \ldots \cdot (1 + p_n + p_n^2 + \ldots + p_n^{\alpha_n}).$$

3. У числа n ровно 6 натуральных делителей. Сумма этих делителей равна 3500. Найдите все n.

   Ответ: 1996.

   Решение. Число n имеет вид: p^5 или $p \cdot q^2$. В первом случае сумма всех его делителей равна $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5$, во втором — $(1 + p)(1 + q + q^2)$.

   Рассмотрим уравнение $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 = 3500$ или $p(1 + p + p^2 + p^3 + p^4) = 3499$. 3499 — простое число, следовательно этот случай невозможен.

   Рассмотрим уравнение $(1 + p)(1 + q + q^2) = 3500$ или $(1 + p)(1 + q + q^2) = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7$. Заметим, что число $1 + q + q^2$ может оканчиваться только цифрами 1, 3 или 7, то есть не может делиться ни на 5 и ни на 2. Значит, $1 + p$ делится на $5^3 \cdot 2^2$. При этом, $1 + q + q^2 > 1$, следовательно, $1 + q + q^2 = 7$, $q = 2$. Тогда $1 + p = 500$, $n = 499 \cdot 2^2 = 1996$.

   В следующей задаче используется

   Лемма 3. Степень, в которой простое число p входит в разложение $n!$, может быть вычислена по формуле

   $$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^k}\right],$$

   где k удовлетворяет неравенствам $p^k \leqslant n < p^{k+1}$.

   Поясним эту лемму. Каждое p-е число делится на p, значит, среди первых n чисел $\left[\frac{n}{p}\right]$ чисел делится на p. Каждое из них войдет в разложение $n!$ вместе с p. Аналогично, каждое p^2-е число делится на p^2, и, следовательно, $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ чисел войдут в разложение $n!$ вместе с p^2. И так до тех пор, пока n делится на p^k. Сложив все эти выражения, получим утверждение леммы.

4. При каком наименьшем натуральном n число $2009!$ не делится на n^n?

   Ответ: 47.

   Решение. Ясно, что если $p^2 \leqslant 2009$, то $2009!$ делится на p^p, а если $p^2 > 2009$, то число $2009!$ не делится на p^p. $43^2 < 2009$, $47^2 > 2009$. Таким образом, $2009!$ делится на 43^{43} и не делится на 47^{47}. Все простые числа $p < 43$ входят в разложение $2009!$ в степени, большей 43, так как, $\left[\frac{2009}{p}\right] > 43$. Значит, для всех чисел $m \leqslant 43$ (и простых и составных), $2009!$ делится на m^m.

   $46^{46} = 2^{46} \cdot 23^{46}$. $2009!$ делится и на 2^{46} и на 23^{46}. Аналогично проверяется, что $2009!$ делится и на 45^{45} и на 44^{44}.

5. Решить в натуральных числах уравнение $n! + 5n + 13 = k^2$.

   Ответ: $(2, 5)$.

   Решение. Рассмотрим $n = 1, 2, 3, 4, 5:$ выражение $n! + 5n + 13$ принимает значения 19, 25, 34, 57, 163 соответственно. Получаем, что из этих чисел подходит только $n = 2$.

   Заметим, что при $n \geqslant 5$ число $n!$ заканчивается на 0. Значит, выражение $n!+5n+13$ заканчиватеся на 0 или 8. Квадраты натуральных чисел могут заканчиваться только на $0, 1, 4, 5, 6, 9$, следовательно, при $n \geqslant 5$ решений нет.

6. Решить в натуральных числах уравнение $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{25}$, где $m > n$.

   Ответ: $n = 26$, $m = 650$; $n = 30$, $m = 150$.

   Решение. Перепишем уравнение в виде: $m(n - 25) = 25n$. Заметим, что при $n = 25$ равенство неверно ни при каком натуральном m. Следовательно,
$$m = \frac{25n}{n - 25} = 25 + \frac{625}{n - 25}.$$
   Число $n - 25$ является делителем 625, следовательно находится среди чисел ± 1; ± 5; $\pm 5^2$; $\pm 5^3$; $\pm 5^4$. Учитывая, что n и m — натуральные, получаем, $n > 25$, $n \in \{26, 30, 50, 150, 650.\}$. Находим пары $(26, 650)$; $(30, 150)$; $(50, 50)$; $(150, 30)$; $(650, 26)$. Далее, учитывая условие $m > n$ получаем ответ.

7. Решить в целых числах $mn^2 = 10^5 n + m$.

   Ответ: $n = m = 0$; $n = \pm 3$, $m = \pm 37500$; $n = \pm 9$, $m = \pm 11250$.

   Решение. Перепишем уравнение в виде: $m(n^2 - 1) = 10^5 n$. Заметим, что при $n = \pm 1$ равенство неверно ни при каком целом m. Следовательно,
$$m = \frac{10^5 n}{n^2 - 1} = \frac{5^5 \cdot 2^4}{n - 1} + \frac{5^5 \cdot 2^4}{n + 1}.$$
   Заметим, что $m = n = 0$ — решение. И если (n, m) — решение, то и $(-n, -m)$ — решение. Будем решать относительно натуральных n. Числа $n + 1$ и $n - 1$ являются делителями $5^5 \cdot 2^4$. Причем НОД$(n-1, n+1)$ или 1 или 2. Пусть $n - 1$ делится на 5, то есть $n - 1 = 2^r \cdot 5^k$, $0 \leqslant r \leqslant 4$, $1 \leqslant k \leqslant 5$. Тогда $n + 1 = 2^r \cdot 5^k + 2$ не делится на 5 и, следовательно $n + 1 = 2^l$, где $r < l \leqslant 4$. Получаем, что $2^r \cdot 5^k + 2 = 2^l$, откуда следует, что $r = 1$ и $5^k + 1 = 2^{l-1}$. Это невозможно, при $1 \leqslant k \leqslant 5$.

   Значит, $n - 1 = 2^t$, $0 \leqslant t \leqslant 4$. Проверкой получаем, что $n - 1 = 2$, $n - 1 = 8$.

8. Решить в целых числах $m^4 - 2n^2 = 1$.

   Ответ: $n = 0$, $m = \pm 1$.

   Решение. Заметим, что m — нечетное, $m = 2k + 1$. Тогда $n^2 = 4k(k + 1)(2k^2 + 2k + 1)$. Числа k, $k + 1$ и $2k(k + 1) + 1$ — попарно взаимно простые. Значит, $|k|$ и $|k + 1|$ — точные квадраты, что возможно только при $k = 0$ или $k = -1$.

9. Решить в натуральных числах $3^n + 4^m = 5^k$.

   Ответ: $m = n = k = 2$.

   Решение. Рассмотрим остатки по модулю 3: $3 \equiv 0$, $4 \equiv 1$, $5 \equiv -1 \mod 3$. Значит, $1^m \equiv (-1)^k \mod 3$, то есть $k = 2r$.

   Рассмотрим остатки по модулю 4: $3 \equiv -1$, $4 \equiv 0$, $5 \equiv 1 \mod 4$. Значит, $(-1)^n \equiv 1^k \mod 4$, то есть $n = 2t$.

   Рассмотрим уравнение $3^{2t} + 2^{2m} = 5^{2r}$, $t, m, r \in \mathbb{N}$. Получаем, что $(5^r - 3^t)(5^r + 3^t) = 2^{2m}$, то есть $5^r - 3^t = 2^s$, $0 \leqslant s \leqslant 2^{2m-1}$. Тогда, $5^3 + 3^t = (5^r - 3^t) + 2 \cdot 3^t = 2^s + 2 \cdot 3^t = 2^{2m-s}$. Откуда получаем $s = 1$ (если $s = 0$, то $1 + 2 \cdot 3^t = 2^{2m}$, если $s > 1$, то $1 < 2^{s-1} + 3^t = 2^{2m-s-1}$).

   Значит $5^r - 3^t = 2$, $5^r + 3^t = 2 + 2 \cdot 3^t = 2^{2m-1}$, откуда получаем, $3^t = (2^{m-1} - 1)(2^{m-1} + 1)$. Два числа, отличающиеся на 2, являются степенями тройки, только в одном случае: когда это 1 и 3. Получаем $2^{m-1} - 1 = 1$, $3^t = 1 \cdot 3$.

10. Все обыкновенные правильные несократимые дроби, числители и знаменатели которых двузначные числа, упорядочили по возрастанию. Между какими двумя последовательно расположенными дробями находится число $\frac{5}{8}$?

    Ответ: $\frac{58}{93} < \frac{5}{8} < \frac{62}{99}$.

    Решение. Проведем оценку снизу. Пусть $\frac{5}{8} > \frac{m}{n}$. Рассмотрим $\varepsilon \doteq \frac{5}{8} - \frac{m}{n} = \frac{5n-8m}{8n}$.

    Найдем такие m и n, что $5n - 8m = 1$. Решая это диофантово уравнение, получим, что все m и n удовлетворяют условию $n = 5+8k$, $m = 3+5k$, $k \in \mathbb{Z}$. Множество несократимых дробей, числитель и знаменатель которых — двузначные числа, удовлетворяющие этим условиям, обозначим A_1. В это множество входят числа $\frac{58}{93}$, $\frac{53}{85}$, $\frac{48}{77}$ и т.д. Для каждого $\frac{m}{n} \in A_1$ выполнено $\varepsilon = \frac{1}{8n}$. Понятно, что ε минимально для $\frac{58}{93}$, $\varepsilon = \frac{1}{8\cdot 93}$. Для всех других несократимых дробей, меньших $\frac{5}{8}$, $\varepsilon = \frac{5n-8m}{8n} \geqslant \frac{2}{8n} \geqslant \frac{2}{8\cdot 99} = \frac{1}{4\cdot 99}$. Ясно, что эта разность больше $\frac{1}{8\cdot 93}$.

    Аналогично, $\frac{m}{n} - \frac{5}{8} = \frac{8m-5n}{8n}$. $8m - 5n = 1$, $m = 2+5k$, $n = 3+8k$. Найдем дробь с наибольшим знаменателем: $\frac{62}{99}$.

11. Найдите все натуральные числа, являющихся степенью двойки, такие, что после зачеркивания первой цифры их десятичной записи снова получается запись числа, являющегося степенью двойки.

    Ответ: 32, 64.

    Решение. Пусть $A\cdot 10^k + 2^r = 2^{r+n}$, A — цифра. $A \cdot 10^k = 2^r(2^n - 1)$, $2^n - 1 = b\cdot 5^k$, тогда степень двойки должна оканчиваться на 0 или 5, то есть $n = 4m$. $(2^{2m}-1)(2^{2m}+1) = b\cdot 5^k$. Одно из чисел $2^{2m}-1$, $2^{2m}+1$ делится на 5^k, другое взаимно просто с 2 и 5. То есть A делится или на $2^{2m}-1$ или на $2^{2m}+1$. Значит, $m = 1$, $n = 4$, $k = 1$.

12. На числовой оси отмечены все точки с целыми координатами. Разрешается прыгать на 1 и 4 вправо и влево. Можно ли за 2010 таких прыжков попасть из т. 1 в т. 2, ни разу не попадая в точки с координатами, кратными 4?

    Ответ: Нет.

    Решение. Предположим, что это возможно. Обозначим прыжки на 1 как К, а прыжки на 4 как "Д". Пусть у нас k "коротких"и d "длинных"прыжков. Тогда $k + d = 2010$. Заметим, что в любой последовательности последовательности прыжков "ККДКДДД..."мы можем поменять местами короткий и длинный прыжки. Действительно, длинный прыжок не меняет остаток от деления на 4 координаты точки, в которой мы находимся. Значит, если короткий прыжок был возможен после длинного, то он возможен и до длинного. Таким образом, мы можем переместить в нашей последовательности все короткие прыжки в конец. То есть последовательность прыжков будет иметь вид "ДДД...ДДДККК....КК". Так как из точки 1 мы попали в точку 2, то в конце мы находимся между 0 и 4, значит все короткие прыжки были совершены в этом же интервале. Получается, что длинных прыжков — четное число (количество длинных прыжков вправо равно количеству длинных прыжков влево). Значит, $d = 2d_1$, $k = 2010 - 2d_1$ — четное число. Заметим, далее, что при каждом кортком прыжке четость координаты меняется. Значит после четного числа коротких прыжков мы будем находиться в точке с нечетной координатой, что противоречит предположению.