О п р е д е л е н и е 0.1. Многочленом называется выражение вида $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$.

1. Докажите, что $f(0) = a_0$.

2. Докажите, что $f(1) = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$.

3. Докажите, сумма всех коэффициентов при четных степенях равна $\dfrac{f(1) + f(-1)}{2}$.

4. Докажите, сумма всех коэффициентов при нечетных степенях равна $\dfrac{f(1) - f(-1)}{2}$.

5. Найти свободные члены и суммы коэффициентов многочленов $(x^2 + x - 1)^{2011}$, $(3x^2 - 4x + 2)^{100}$, $(x + 1)^n$.

6. Докажите тождества $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$, $x^{2n+1} + 1 = (x+1)(x^{2n} - x^{2n-1} + \ldots + x^2 - x + 1)$.

7. Один из корней уравнения $x^3 - 6x^2 + ax - 6$ равен 3. Найдите все корни этого уравнения.

8. Один из корней уравнения $3x^3 + ax^2 + bx + 12$ равен $1 + \sqrt{3}$. Найдите все корни этого уравнения.

9. Многочлен $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ имеет корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Какие корни имеют многочлены:

   (a) $a_nx^n - a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}a_1x + (-1)^na_0$;
   (b) $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$
   (c) $a_0x^n - a_1x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}a_{n-1}x + (-1)^na_n$;
   (d) $2^na_nx^n + 2^{n-1}a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + 2a_1x + a_0$?

Теорема 0.1. Пусть многочлены $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ и $g(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0$ принимают равные значения при любом $x \in \mathbb{R}$. Тогда эти многочлены имеют одинаковые коэффициенты при одинаковых степенях x.

1. Доказать, чтоесли многочлен является четной функцией, то он не содержит одночленов нечетной степени.

2. Доказать, чтоесли многочлен является нечетной функцией, то он не содержит одночленов четной степени.

3. Докажите, что после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(x^2 - x + 1)^{2011} + (x^2 + x + 1)^{2011}$ не останется нечетных степеней x.

4. Найти суммы коэффициентов многочлена при четных, нечетных степенях x.

О п р е д е л е н и е 0.2. Многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x) \neq 0$, если существует такой многочлен $q(x)$, что выполняется равенство $f(x) = g(x)q(x)$.

О п р е д е л е н и е 0.3. Пусть $g(x)$ — многочлен, отличный от 0. Многочлен $r(x)$, имеющий степень меньшую, чем степень $g(x)$, или равный 0, называется остатком от деления $f(x)$ на $g(x)$, если разность $f(x) - r(x)$ делится на $g(x)$.

1. Докажите, что многочлен $g(x)$ в первом определении определяется однозначно.

2. Докажите, что многочлен $r(x)$ во втором определении определяется однозначно.

3. При каких целых n число $n^3 + n^2 - 5n - 2$ является простым.

4. Если $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами, причем старший коэффициент $g(x)$ равен единице, то и частное и остаток являются многочленами с целыми коэффициентами.

5. Найдите, при каких действительных p и m многочлен $x^3 + px + 1$ делится на многочлен $x^2 + x + m$.

6. Найдите, при каких действительных a и b многочлен $ax^4 + bx^3 + 1$ делится на многочлен $(x-1)^2$.
7. (Теорема Безу) Остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $x-a$ равен значению многочлена в точке $x = a$.
8. Решить уравнение $x^3 + 2x^2 + 3x - 22 = 0$.
9. Доказать, что $2^{35} + 1$ делится на 11.
10. Докажите, что $3^{60} + 1$ делится на 82.
11. Докажите равенство $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$.
12. Докажите равенство $\sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{26}{27}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{26}{27}}} = 1$.
13. Докажите, что для любых чисел a, b, c число $(a-b)(a+b-c)^2c + (b-c)(b+c-a)^2a$ делится на $a-b+c$.
14. Докажите, что для любых чисел a, b, c число $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$ делится на $(x-y)(y-z)(z-x)$.
15. Найти k при которых многочлен $x^3 + y^3 + z^3 - kxyz$ делится на $x + y + z$.
16. Найти остаток от деления многочлена $x^{105} + x + 1$ на $x^2 - 1$.
17. Найдите остаток от деления $x^{99} - 3x^{98} + x^2 + 1$ на $x^2 - 4x + 3$.
18. Остатки от деления многочлена $f(x)$ на $x-2$ и $x-3$ равны соответственно 5 и 7. Найдите остаток от деления этого многочлена на $(x-2)(x-3)$.
19. Найти при каких a и b многочлен $x^{10} + ax^2 + bx + 1$ делится на $x^2 - 1$.
20. Докажите, что если многочлен $f(x^n)$ делится на $x-1$, то он делится и на $x^n - 1$.

Теорема 0.2. Если значения двух многочленов степени не выше n совпадают в $(n+1)$-й точке, то эти многочлены равны.

1. Докажите, что если a, b, c — попарно различные числа, то
$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} \equiv 1.$$
2. Решить уравнение
$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{(x-c)(x-d)(x-a)}{(b-c)(b-d)(b-a)} + \frac{(x-d)(x-a)(x-b)}{(c-d)(c-a)(c-b)} + = 1,$$
где a, b, c, d — попарно различные числа.
3. Докажите, что корень кратности k многочлена $f(x)$ является корнем кратности $k-1$ его производной $f'(x)$.
4. Найти все многочлены, делящиеся на свою производную.
5. При каких действительных a и b многочлен $ax^5 + bx^4 + 1$ имеет кратные корни?
6. Найти значения a, b, c при которых $x = -1$ является трехкратным корнем уравнения $x^5 + ax^3 + bx + c = 0$.
7. Докажите, что если все корни многочлена $g(x)$ действительны, просты и являются корнями многочлена $f(x)$, то $f(x)$ делится на $g(x)$.

1. Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то его свободный член делится на p, а старший коэффициент делится на q.

2. Докажите, что если корни уравнения x^2+px+q, где p и q — целые числа, рациональны, то оба его корня — целые числа.

3. Доказать что многочлен с целыми коэффициентами не имеет целых коренй, если $f(0)$ и $f(1)$ — нечетные числа.

4. Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами, то $f(1)$ делится на $p-q$, $f(-1)$ делится на $p+q$.

5. Докажите, что уравнение $x^4-3x^3y=y^4$ не имеет решений в целых числах.

6. Существует ли многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, для которого $f(1)=2010$, $f(3)=2011$?

7. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, значения которого $f(2)$ и $f(3)$ делятся на 6. Докажите, что $f(5)$ делится на 6.

1. Найти равнение с целыми коэффициентами, корнями которого является число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

2. Найти уравнение с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

3. Найти уравнение с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.